SOLUZIONE PROBLEMA 1

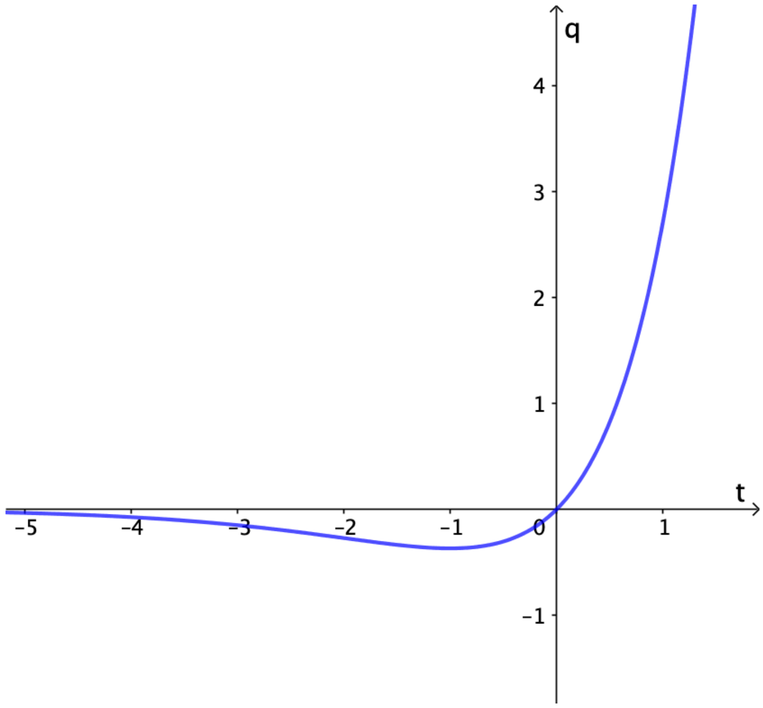
1. Studiamo la funzione $q(t) = at \cdot e^{bt}$, essendo a e b costanti reali con $a > 0$.
   - Il dominio della funzione è tutto **R** e la funzione è ovunque continua.
   - Il grafico della funzione non presenta simmetrie elementari perché la funzione non è pari ($q(t) \neq q(-t)$), né dispari ($q(t) \neq -q(-t)$).
   - Esiste un unico zero della funzione che è $t = 0$, infatti, imponendo che la funzione si annulli:
   $$q(t) = 0$$
   $$at \cdot e^{bt} = 0$$
   $$t = 0$$
   per ogni valore di a e b.
   - Studiamo il segno della funzione:
   $$at \cdot e^{bt} > 0 \text{ per } t > 0$$
   infatti la costante $a > 0$ e la funzione esponenziale $y = e^{bt}$ è sempre positiva, qualsiasi sia la costante b.
   - Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio, distinguendo tre casi:
     a) $b = 0$
     La funzione $q(t) = at$ è una retta passante per l'origine, crescente, che tende a $+\infty$ per $t \to +\infty$ e a $-\infty$ per $t \to -\infty$.

     b) $b > 0$

     Il limite $\lim_{t \to -\infty} at \cdot e^{bt}$ presenta una forma indeterminata di tipo $[-\infty \cdot 0]$, che si risolve applicando le regole della gerarchia degli infiniti o il teorema di De l'Hôpital al rapporto $\frac{at}{e^{-bt}}$. Si ha:
     $$\lim_{t \to -\infty} at \cdot e^{bt} = 0$$
     Inoltre:
     $$\lim_{t \to +\infty} at \cdot e^{bt} = [+\infty \cdot (+\infty)] = +\infty$$

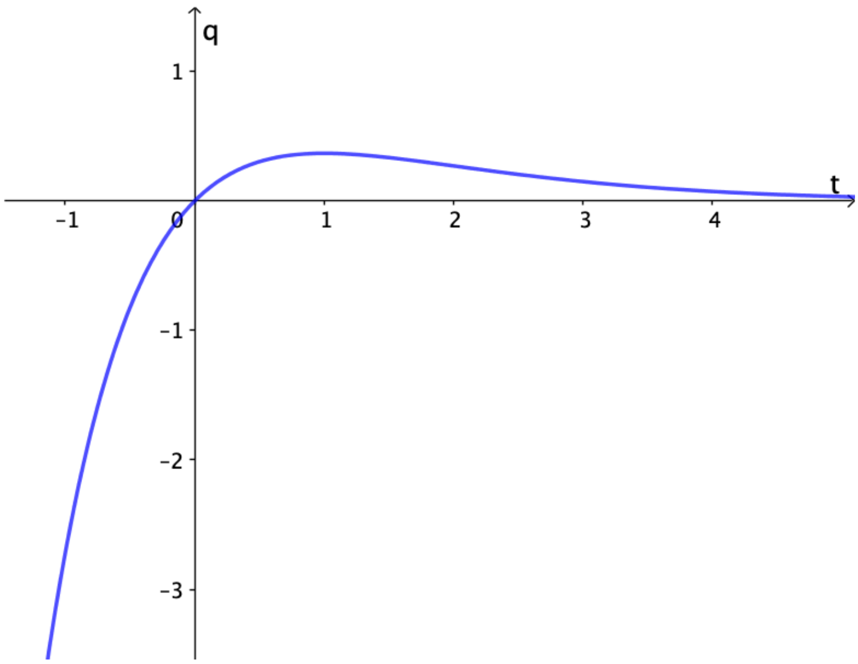
     c) $b < 0$
     Il limite $\lim_{t \to +\infty} at \cdot e^{bt}$ presenta una forma indeterminata di tipo $[+\infty \cdot 0]$, che si risolve applicando le regole della gerarchia degli infiniti o il teorema di De l'Hôpital al rapporto $\frac{at}{e^{-bt}}$. Si ha:
     $$\lim_{t \to +\infty} at \cdot e^{bt} = 0$$
     Inoltre:
     $$\lim_{t \to -\infty} at \cdot e^{bt} = [-\infty \cdot (+\infty)] = -\infty$$

- Le informazioni raccolte sono sufficienti per tracciare il grafico della funzione $q(t)$.
  Per $b > 0$, l'andamento qualitativo di $q(t)$ sarà:



Il grafico della funzione presenta un punto di minimo assoluto di ascissa $t < 0$.

Per $b < 0$, l'andamento qualitativo di $q(t)$ sarà:



In questo secondo caso, il grafico della funzione presenta un punto di massimo assoluto di ascissa $t > 0$.

Per determinare i valori dei parametri a e b, in modo che la funzione abbia un massimo nel punto $B\left(2;\frac{8}{e}\right)$ impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} q(2)=\frac{8}{e} \\ q'(2)=0 \end{cases} \quad [*]$$

Essendo $q'(t)=a\cdot e^{bt}+abt\cdot e^{bt}=a\cdot e^{bt}\left(1+bt\right)$, si ottiene:

$$\begin{cases} 2a\cdot e^{2b}=\frac{8}{e} \\ a\cdot e^{2b}\left(1+2b\right)=0 \end{cases}$$

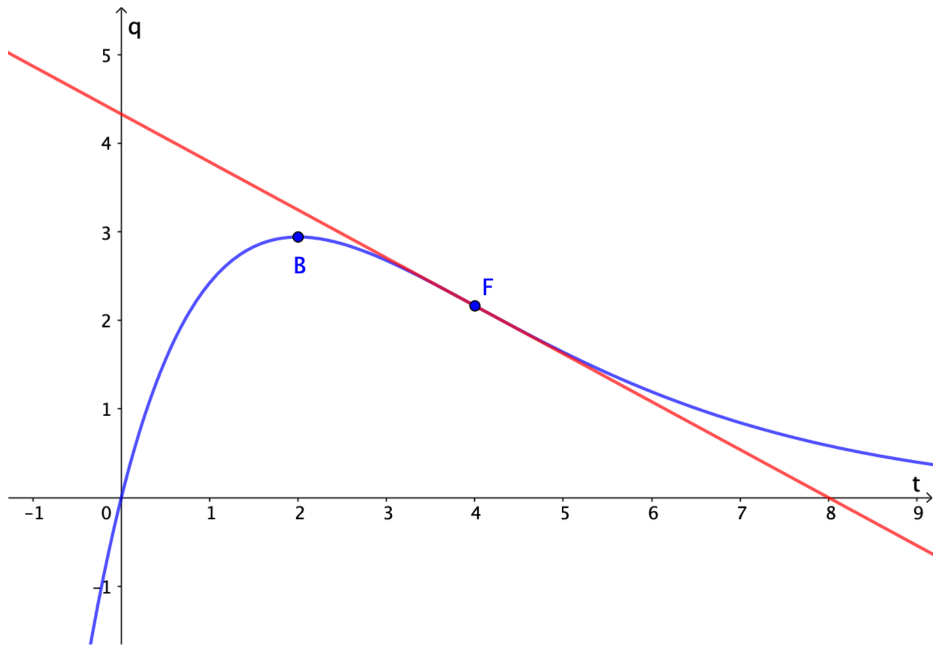
da cui:

$$\begin{cases} a=4 \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Poiché il valore di *b* trovato è negativo, la discussione effettuata in precedenza garantisce che il punto stazionario che soddisfa le condizioni [*] sia effettivamente un punto di massimo.

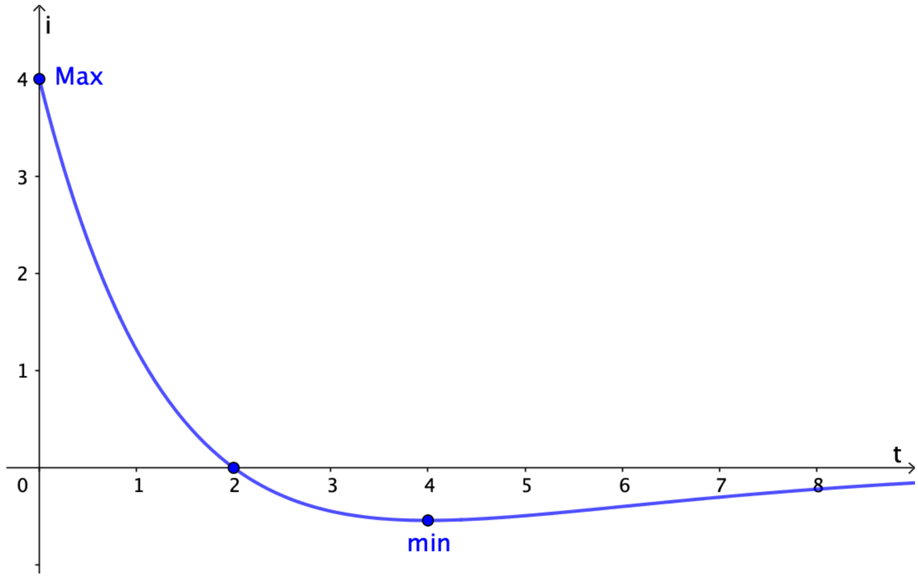
2. Studiamo ora la funzione $q(t)=4t\cdot e^{-\frac{1}{2}t}$. Parte dello studio è già stato svolto nel punto precedente e in particolare valgono i valori dei limiti calcolati per $b<0$.
   - Essendo $q'(t)=2\cdot e^{-\frac{1}{2}t}\left(2-t\right)$ la funzione è crescente per $t<2$ e decrescente per $t>2$, e, come anticipato nel punto (1) del problema, il grafico presenta un punto di massimo assoluto di coordinate $\left(2;\frac{8}{e}\right)$, essendo $q(2)=\frac{8}{e}$.
   - La derivata seconda è $q''(t)=e^{-\frac{1}{2}t}\left(t-4\right)$, positiva per $t>4$ e negativa per $t<4$. Pertanto in $t=4$ c'è un flesso discendente, infatti $q'(t=2)=-\frac{4}{e^2}<0$. L'ordinata del flesso è $q\left(4\right)=4\cdot 4\cdot e^{-\frac{4}{2}}=16e^{-2}=\frac{16}{e^2}$.
   - La tangente inflessionale ha equazione $y=-\frac{4}{e^2}t+\frac{32}{e^2}$.

- Il grafico della funzione sarà pertanto:



3. C'è un problema di interpretazione del significato fisico della funzione *q*(*t*), così come viene introdotta: non è corretto infatti parlare di carica che attraversa una sezione del conduttore in un istante di tempo *t*, che è uguale a zero. Pertanto interpretiamo la funzione come la quantità di carica che ha attraversato la sezione del conduttore nell'intervallo di tempo $[0;t]$.
   La costante a, moltiplicata per il tempo t, deve dare una carica elettrica, pertanto le sue dimensioni corrispondono a quelle di una carica divisa per un tempo, ovvero a quelle di una corrente elettrica $[a]=[i]$. Il prodotto bt deve essere un numero puro e quindi $[b]=[t^{-1}]$.
   L'intensità della corrente è $i(t)=\dfrac{dq}{dt}$, quindi $i(t)=q'(t)=2e^{-t/2}(2-t)$.
   La funzione q', come già osservato nel punto precedente, è positiva per $t<2$ e negativa altrove e $i'(t)=q''(t)=e^{-t/2}(t-4)$ che è positiva per $t>4$ e negativa altrove. Quindi per $t=4$ si trova un punto di minimo assoluto con $i(t=4\,\text{s})=-\dfrac{4}{e^2}\,\text{A}\simeq -0{,}54\,\text{A}$. Il massimo assoluto si ha invece nell'istante $t=0$, quando la corrente vale $i(t=0)=4\text{A}$. Si noti che al tempo $t=2\,\text{s}$ la corrente si annulla e poi cambia segno, ossia inverte il suo verso. Dopo molto tempo il valore dell'intensità di corrente corrisponde al limite per $t\to+\infty$ della funzione $i(t)$, ossia:
   $$\lim_{t\to+\infty} 2e^{-t/2}(2-t)=0^-$$

Il grafico della funzione $y = i(t)$ è:



4. Se continuiamo a intendere che la funzione $y = q(t)$ sia la carica che ha attraversato la sezione del conduttore nell'intervallo di tempo $\left[0; t\right]$, la quantità richiesta è:

$$Q\left(t_0\right) = \int_0^{t_0} i(t)\,dt = q\left(t_0\right) - q\left(0\right) = 4t_0 e^{-t_0/2}$$

e risulta $\lim_{t_0 \to +\infty} Q(t_0) = 0$. Si noti che questo significa che la carica che ha attraversato la sezione del conduttore nell'intervallo di tempo $\left[0; 2\,\mathrm{s}\right]$ è la stessa che lo attraversa nel verso opposto per $t > 2\,\mathrm{s}$.

L'energia dissipata per effetto Joule nell'intervallo di tempo $\left[0; t_0\right]$ è:

$$W = \int_0^{t_0} R\left[i(t)\right]^2 dt = \int_0^{t_0} 3\cdot\left[2e^{-t/2}\left(2-t\right)\right]^2 dt = 12\int_0^{t_0} e^{-t}\left(2-t\right)^2 dt$$