MATEMATICA	**Si possono fare scoperte matematiche importanti in solitudine?**

La storia della scienza insegna che l'isolamento può diventare una buona occasione per fare delle importanti scoperte. È accaduto almeno tre volte: a Renato Cartesio e Isaac Newton nel Seicento, e a Bertrand Russell nel Novecento.

Nel 1618 scoppiò la Guerra dei Trent'anni. L'anno successivo Cartesio, che aveva 23 anni e stava girovagando per l'Europa, trascorse tutto l'inverno in casa, mentre fuori nevicava e imperversava la guerra. Cartesio scrive nel *Discorso sul metodo*:

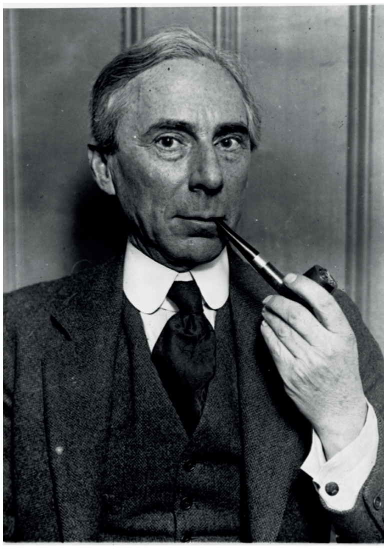
> *Mi trovavo allora in Germania, richiamatovi dalle guerre che colà ancora si combattono, fui costretto dall'inverno incipiente ad acquartierarmi in una località dove, non essendo distratto da alcuna conversazione e non essendo turbato, per fortuna, né da preoccupazioni né da passioni, trascorrevo tutto il giorno da solo chiuso in una stanza ben riscaldata da una stufa, dove avevo tutto l'agio di intrattenermi con i miei pensieri.*

Da solo, confortato dal calore amichevole di una stufa, Cartesio poté studiare e riflettere, e gettò le basi del suo pensiero scientifico e filosofico.

Nel 1665, a causa di un'epidemia di peste scoppiata a Londra, l'allora ventiquattrenne Isaac Newton si mise per due anni in "quarantena volontaria" nella sua casa di campagna, dove elaborò le sue teorie rivoluzionarie di matematica e di fisica. È lui stesso a raccontarcelo, negli ultimi anni della sua vita:

Trovai il metodo delle approssimazioni delle serie e la regola per ridurre un qualunque esponente di un binomio qualsiasi a tali serie [NdR: il binomio di Newton]. Lo stesso anno trovai il metodo delle tangenti e il metodo diretto delle flussioni, e l'anno dopo il metodo inverso delle flussioni [NdR: il calcolo delle derivate e degli integrali]. Formulai la teoria dei colori. Cominciai a pensare alla gravità che si estende all'orbita della Luna e dedussi che le forze che trattengono i pianeti nelle loro orbite devono essere reciprocamente come i quadrati delle loro distanze dai centri intorno a cui ruotano [NdR: la gravitazione universale]. Perché a quei tempi ero nel pieno della mia età e pensavo alla matematica e alla filosofia più che in qualsiasi altro momento.

Fu proprio in questo periodo di isolamento forzato che Newton formulò le teorie che lo resero uno degli scienziati più importanti della storia.



Nel 1918 Bertrand Russell scontò in una prigione inglese una condanna a sei mesi di reclusione per aver partecipato a un movimento pacifista durante la prima guerra mondiale. Non si trattava di Auschwitz o Guantanamo: in una lettera dal carcere Russell paragonò l'esperienza a una crociera su un transatlantico, in cui ci si trova intrappolati assieme a tante persone mediocri e si può cercar rifugio solo nella propria cabina. La prigione, dunque, «aveva dei lati positivi, addirittura piacevoli: nessun impegno, né decisioni da prendere, né visite inaspettate, né interruzioni mentre si lavora». Il risultato fu l'*Introduzione alla filosofia matematica*, un'opera sui fondamenti della matematica.

In definitiva, si può fare matematica anche in solitudine. Come diceva George Pólya: «La matematica è la scienza più a buon mercato. A differenza della fisica o della chimica non richiede nessun equipaggiamento costoso: tutto ciò di cui ha bisogno è carta e matita».

Quanto sono "solitari" i numeri primi?

Un *numero primo* è un numero naturale maggiore di 1 che ha solo due divisori interi positivi (1 e sé stesso). Da millenni i numeri primi stuzzicano la curiosità di matematici e appassionati. Nel III secolo a.C. Euclide provò che sono infiniti, mentre nel 1798 Carl Friedrich Gauss dimostrò il *teorema fondamentale dell'aritmetica:* ogni numero naturale maggiore di 1 si scompone come prodotto di numeri primi in un unico modo. Molti problemi sui numeri primi sono facili da enunciare ma molto difficili da risolvere: basta pensare alle famose congetture tuttora irrisolte di Goldbach (ogni numero pari maggiore di due è la somma di due primi) e dei primi gemelli (ci sono infinite coppie di primi che differiscono tra loro di due).

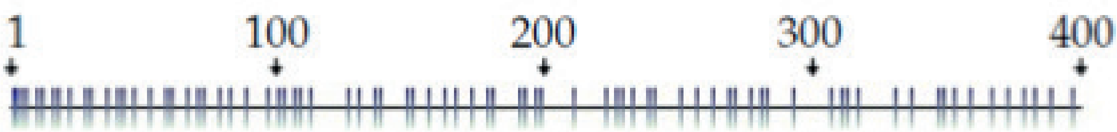


Figura 1 La distribuzione dei numeri primi fino a 400.

I numeri primi non sono distribuiti uniformemente (Fig. 1): ce ne sono quattro fra i primi dieci numeri, 25 tra i primi cento, 168 fino a mille, 1229 fino a diecimila, e così via. L'intervallo tra due numeri primi consecutivi è molto variabile: ci sono numeri primi consecutivi separati da un solo numero (i primi gemelli) e numeri primi consecutivi "solitari", separati da veri e propri "deserti" formati da moltissimi numeri non primi. Lo scrittore Paolo Giordano, nel suo romanzo *La solitudine dei numeri primi*, descrive la situazione con un tocco letterario: «I numeri primi sono numeri sospettosi e solitari e per questo meravigliosi».

Nessuno sa di preciso come sono distribuiti i numeri primi. Il teorema dei numeri primi descrive approssimativamente la loro *distribuzione asintotica*. Per ogni numero reale positivo , definiamo innanzitutto la funzione:

$\pi(x)$ = numero di primi minori o uguali a x

Il teorema dei numeri primi afferma che

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

dove $\ln x$ è il logaritmo naturale di x. Ciò significa che il quoziente delle funzioni $\pi(x)$ e $\frac{x}{\ln x}$ tende a 1 per x che tende all'infinito. La Tab. 1 e le Fig. 2-3 confrontano le due funzioni.

Tabella 1 Distribuzione dei numeri primi: confronto tra le funzioni $\pi(x)$ e $\frac{x}{\ln x}$

x	$\pi(x)$	$\pi(x)/(x/\ln x)$
10	4	0,921
10^2	25	1,151
10^3	168	1,161
10^4	1229	1,132
10^5	9592	1,104
10^6	78 498	1,084
10^7	664 579	1,071
10^8	5 761 455	1,061
10^9	50 847 534	1,054
10^{10}	455 052 511	1,048

Fig. 2 Confronto tra i grafici di $\pi(x)$ (in rosso) e $\frac{x}{\ln x}$ (in blu) per $x \geq 5$

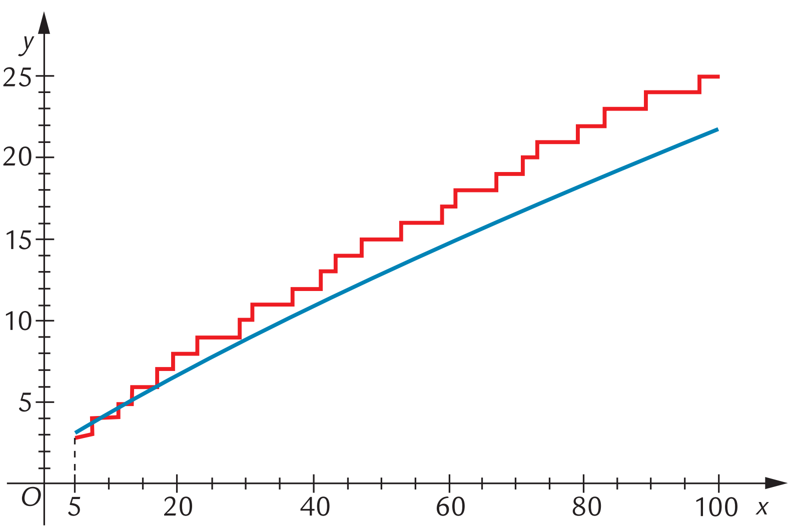
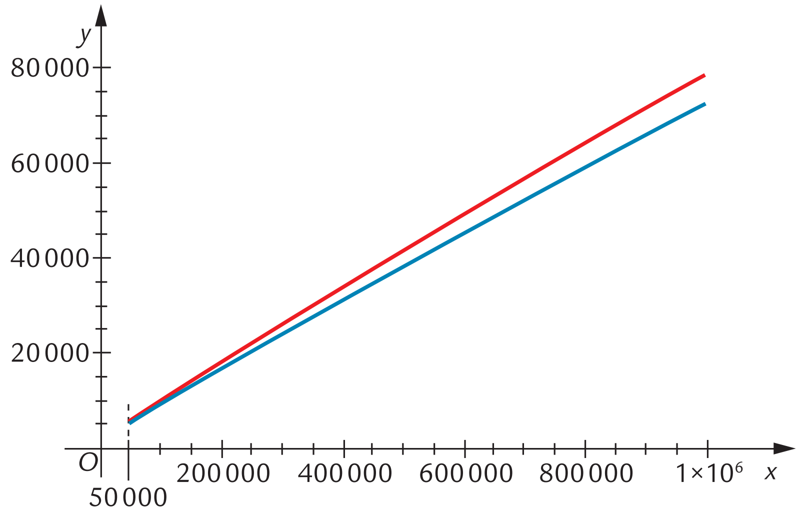


Fig. 3 Confronto tra i grafici di $\pi(x)$ (in rosso) e $\frac{x}{\ln x}$ (in blu) per $x \geq 50\,000$



Il teorema dei numeri primi fu enunciato per la prima volta da Adrien-Marie Legendre nel 1798 e fu riproposto pochi anni dopo da Carl Friedrich Gauss. Nel 1859 Bernhard Riemann collegò la dimostrazione del teorema a una funzione di una variabile complessa, nota come *funzione zeta di Riemann*. Anche se Riemann non riuscì a provare il teorema, le sue idee sono state fondamentali. Nel 1896, Jacques Hadamard e Charles Jean de la Vallée-Poussin, indipendentemente, dimostrarono il teorema. Entrambe le dimostrazioni si basano sulla zeta di Riemann.

La funzione zeta di Riemann è legata alla congettura di Riemann, che riguarda la distribuzione degli zeri della funzione zeta, a sua volta collegata alla distribuzione dei numeri primi. Sembra un problema destinato a rimanere confinato nel mondo dell'alta speculazione matematica. Invece riguarda tutti noi, perché dai numeri primi dipende la sicurezza delle comunicazioni informatiche, fra cui le email, i messaggi WhatsApp e gli acquisti su Internet. Se ne svelassimo tutti i segreti, nessuna crittografia usata attualmente sarebbe più sicura.

Ora tocca a te

- **Consideriamo la funzione**

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

  Qual è il suo dominio? Ha punti d'intersezione con gli assi coordinati? Qual è il suo segno?
  Quali sono i suoi limiti nei punti di frontiera del dominio? È continua? Ha asintoti? Ha punti singolari?
  La funzione ha massimi? Ha minimi? Ha flessi?

- **Un'approssimazione della funzione $\pi(x)$ migliore della funzione $\frac{x}{\ln x}$ è data dalla funzione *logaritmo integrale*:**

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln t}\, dt$$

  Supponi che sia $x \geq 2$ e, senza tentare di calcolare l'integrale, rispondi ai seguenti quesiti:

  a. spiega perché la funzione data è certamente definita per ogni $x \geq 2$;

  b. stabilisci qual è il segno della funzione e se ammette zeri;

  c. verifica che la funzione è strettamente crescente e concava.