Una funzione è una "quantità che cambia nel tempo"?

L'analisi è la matematica del cambiamento. Il suo potere deriva dalla capacità di descrivere e predire il comportamento di fenomeni che evolvono nel tempo, come per esempio la caduta di una mela, il moto di una razzo spaziale, la crescita di una popolazione, il decadimento radioattivo, la crescita del prezzo di un bene.

L'analisi è nata nella seconda metà del Seicento per studiare quantità che cambiano, nello spazio o nel tempo. Gottfried Wilhelm Leibniz voleva studiare una importante caratteristica di una curva che cambia da punto a punto, cioè la sua retta tangente, mentre Isaac Newton era interessato a descrivere il moto di un corpo.

Ritratto di Isaac Newton (1642-1726)

Il termine *funzione* compare per la prima volta con Leibniz, ma è con Isaac Newton che emerge, sulla base di motivazioni fisiche, lo stretto legame tra il concetto di funzione e quello di cambiamento. Per Newton il movimento dei corpi è al centro della ricerca, come si può evincere da quanto scrive lui stesso:

Io considero le curve non come costituite da parti molto piccole, ma come descritte da un moto continuo. Le linee sono descritte, e quindi generate, non dalla giustapposizione delle loro parti, ma dal moto continuo dei punti. Questa genesi ha effettivamente luogo in natura e può essere vista quotidianamente nel moto dei corpi.

Per Newton, quindi, una funzione è "una quantità che cambia nel tempo". La derivata della funzione, in questa interpretazione, esprime allora la velocità con cui questa quantità cambia.

Data una funzione $f(t)$, dove la variabile t rappresenta il tempo, la sua funzione derivata descrive il tasso di variazione istantaneo di $f(t)$ nell'istante t, cioè la velocità con cui *cambia* la grandezza $f(t)$ nell'istante t. Per esempio, se $\theta(t)$ è l'angolo descritto nell'intervallo di tempo da 0 a t da un corpo che si muove su una circonferenza, allora $\theta'(t)$ rappresenta la velocità angolare del corpo.

Ora tocca a te

- Che differenza c'è tra la moderna definizione di funzione e il concetto di funzione in Leibniz e Newton?
- Quale è la definizione di derivata di una funzione in un punto x_0? Spiega, in base alla definizione di derivata, perché la derivata di una funzione $f(t)$, dove t rappresenta il tempo, in un prefissato istante t_0 si può interpretare come velocità di variazione della grandezza rappresentata da $f(t)$ nell'istante t_0.
- La Tab. 2 mostra alcuni esempi di funzioni e le loro derivate, con le notazioni appropriate e le grandezze corrispondenti. Tenendo presente l'interpretazione del concetto di derivata come tasso di variazione, spiega il significato che assume la derivata in ciascuno dei casi riportati.

Tabella 2 Significato della derivata di alcune funzioni

Variabile	Grandezza	Funzione	Grandezza	Derivata	Significato ?
t	tempo	$s(t)$	posizione di un corpo all'istante t	$\frac{ds}{dt}$	
t	tempo	$v(t)$	velocità all'istante t	$\frac{dv}{dt}$	
t	tempo	$q(t)$	quantità di carica che attraversa la sezione di un conduttore dall'istante iniziale all'istante t	$\frac{dq}{dt}$	
t	tempo	$c(t)$	concentrazione nell'istante t	$\frac{dc}{dt}$	
q	quantità prodotta di un bene	$C(q)$	costo in corrispondenza della produzione della quantità q	$\frac{dC}{dq}$	
x	ascissa	$f(x)$	ordinata corrispondente all'ascissa x	$\frac{df}{dx}$	